

# Learning in an Estimated Medium--Scale DSGE Model

Sergey Slobodyan and Raf Wouters

## Non-Technical Summary

In this paper, we evaluate the potential role of adaptive learning in an estimated medium-sized Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) model. In Smets and Wouters (2003-2007) it was shown that these models, when equipped with a rich set of frictions and a general stochastic structure, explain the data relatively well. However, using the DSGE model to form a prior for Bayesian Vector Autoregression (BVAR), as in Del Negro et al. (2007), shows that these models are still mis-specified along various dimensions. Some of the responses to shocks in this DSGE-VAR model are more persistent than in a pure DSGE model with real and nominal frictions. One potential dimension of misspecification in these models might be the stringent assumption of rational expectations. This assumption implies that economic agents, when forming their expectations about future outcomes, know exactly the structural model, its parameters, and the stochastic processes. Endowing the agents with so much knowledge is hardly realistic; therefore, it is important to check the consequences of relaxing this assumption.

In this paper, we evaluate empirically the fit of a DSGE model while allowing the agents to form their expectations under imperfect knowledge. More specifically, we assume that private agents use adaptive learning: expectations of the forward-looking variables are obtained as linear functions of past model variables. Coefficients of these linear functions, commonly known as beliefs, are re-estimated every period using a constant gain (perpetual learning) recursive least squares algorithm, a natural extension of a standard Ordinary Least Squares procedure to non-stationary environments. This allows the beliefs about the relationship between expectations and current and past variables to adapt to the patterns recently observed in the data. Our approach is similar to the exercise of Milani (2004), who in contrast to us uses a smaller model which under rational expectations does not fit the data as well, and to the work of Orphanides and Williams (2003-2007) who concentrate more on the monetary policy implications of imperfect information and learning.

Several authors have suggested that adaptive learning can enhance the propagation mechanism of the DSGE models and generate the persistence that is otherwise caused by the real and nominal rigidities (frictions) included into the models, or by the driving stochastic processes. For instance, Orphanides and Williams (2005) illustrate how adaptive learning can lead to inflation scares or to increased inflation persistence. Milani estimates a small scale model both under RE and learning and shows that the learning reduces the scale of structural frictions and results in an improved marginal likelihood relative to the RE model.

We believe that the role of learning is probably smaller in a medium-scale model that fits the data well, with the residuals close to white noise. When driven by thin tail Gaussian innovations, dynamics under learning will not tend to deviate too much from the RE

outcomes at least if the initial beliefs are close to the rational expectations beliefs: the potential benefits of adaptive learning are related to the induced time variation in beliefs, but this variation is very much limited. On the other hand, introducing adaptive learning allows us to restrict the information set available to the agents making forecasts; we show that such restriction tends to improve the model fit significantly.

The specific form of the initial beliefs is very difficult to discover because they depend on historical observations that are not directly taken into account in the likelihood function. We apply several procedures in this paper to estimate these initial beliefs. They can be based on pre-sample data, or one can search for initial beliefs that maximize the likelihood of the in-sample data. Not surprisingly, optimized initial beliefs generate a better model fit.

The learning dynamics is crucially influenced by the assumptions about the information set used in forming the beliefs. An extreme assumption is that agents know the reduced form of the model but have to estimate its parameters. In this case, the agents will use the correct minimum state variable (MSV) representation to estimate their expectations regressions. This case is closest to the rational expectations. However, it may be more realistic to assume that agents use only limited information set to form their expectations. In our setup, the most natural assumption would be that agents use only the observed data in their belief regressions. This learning specification is referred to as VAR learning.

The learning is introduced at the level of the linearized Euler equations. The implications of learning for the agents' budget constraints are therefore neglected. See Preston (2005) for a more consistent treatment of learning in DSGE models.

Turning to results, our best performing learning models generate marginal likelihoods that come close to that of the optimal DSGE-VAR model. Specific initial beliefs contribute significantly to this result, which proves that the model-consistent expectation imposed by the rational expectations hypothesis is too restrictive. The best performing models are the ones where the initial beliefs are optimized to explain the in-sample data, consistent with previous results in the literature. Limiting the set of variables used in the forecasting equations to a list of observed variables can generate models that explain the data better than models with MSV beliefs that use the complete set of observed and unobserved state variables implied by the rational expectations equilibrium. The best-fitting models tend to have rather low estimated gain, which suggests that it is the initial beliefs different from the RE-model consistent ones that bring about improvement in the marginal likelihood, rather than the beliefs updating of the constant gain learning type per se.

Impulse Response Functions are very promising: the learning models are able to generate an inflation response to productivity shocks that is very rapid and short lived, while the response to monetary shocks is slow but very persistent. These results also overcome some of the major misspecification of the DSGE models as indicated by the DSGE-VAR methodology. Having forecasting equations that differ significantly from those implied by the REE seems to be the key to this result.

The additional dynamics that are introduced by the learning process do not systematically alter the estimated structural parameters of the DSGE model. This result contradicts earlier claims in the literature, but is again in line with the results from the DSGE-VAR methodology which indicate misspecification but no systematic bias in the structural parameters.

## Non-Technical Summary

V tomto článku odhadujeme potenciální roli adaptivního učení v odhadovaném středně velkém DSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) modelu. Smets a Wouters (2003 - 2007) ukázali, že tyto modely, jsou-li vybavené bohatou strukturou zlomů a obecnou stochastickou strukturou, vysvětlují data poměrně přesně. Použití DSGE modelu pro formování BVAR (Bayesian Vector Autoregression), jako v Del Negro (2007), ukazuje, že tyto modely jsou stále špatně specifikované v mnoha rozměrech. Některé z odezev DSGE-VAR modelu jsou více trvalé než ty z čistého DSGE modelu s reálnými a nominálními nedokonalostmi. Jeden potenciaální rozměr špatné specifikace v těchto modelech může být zapříčiněn striktním předpokladem racionálních očekávání. Tento předpoklad implikuje, že ekonomičtí agenti při formování svých očekávání o budoucích výstupech znají přesně strukturu modelu, jeho parametry a stochastické procesy. Obohacení agentů o takovoto dovednosti není realistické, proto je nutné studovat důsledky vzdání se tohoto předpokladu.

V tomto článku odhadujeme empirický fit DSGE modelu, přičemž umožňujeme agentům formovat jejich očekávání při nedokonalých znalostech. Uvažujeme, že soukromí agenti formují jejich očekávání za použití učení. Očekávané proměnné jsou lineární funkce minulých parametrů modelu. Koeficienty těchto lineárních vztahů, známé jako znalost, které věří, jsou odhadované každé kolo za použití učení s algoritmem rekurzivních nejmenších čtverců, který je přirozeným zobecněním obyčejných nejmenších čtverců na nestacionární prostředí. Toto umožňuje přizpůsobení vztahu mezi očekávanými a minulými parametry modelu v závislosti na pozorované vzorce v datech. Náš přístup je podobný Milanimu (2004), který na rozdíl od nás používá menší model, kde racionální očekávání nefitují model dobře, a pak práci Orphanidese a Williamse (2003 - 2007), kteří se více soustředí na dopady monetárních efektů při učení s nedokonalými informacemi.

Někteří autoři říkají, že adaptivní učení může vylepšit mechanismus postupu v DSGE modelech a tím generovat setrvačnost, která je jinak přítomna v modelu kvůli reálným a nominálním nepružnostem (nedokonalostem) obsažených v modelu, popř. kvůli stochastickým procesům. Například Orphanides a Williams (2005) ilustrují, jak adaptivní učení může vést k inflačním poruchám nebo inflačnímu přetrvávání. Milani odhaduje malé modely při RE a učení a ukazuje, že učení redukuje rozměr strukturálních nedokonalostí, čímž dostává model s vylepšenou marginální likelihood funkcí.

Věříme, že role učení je pravděpodobně menší ve středně velkých modelech, které fitují data dobře, s residuály blízko bílého šumu. Pokud jsou řízeny Gaussovskými inovacemi, dynamika při učení se nebude moc lišit od RE výsledků, tedy alespoň pokud počáteční podmínky jsou blízko racionálním očekáváním: potenciaální výhoda adaptivního učení je spjata s indukovanou variací v očekáváním, které jsou však omezené. Na druhou stranu zavedení adaptivního učení nám dovoluje omezit informační set, který mají agenti k dispozici při předpovědích. Ukazujeme, že takováto omezení významně zlepší fit modelu.

Specifická forma počátečních znalostí se nedá snadno uhádnout, protože závisí na historických pozorováních, které nejsou explicitně vzaty do úvahy v likelihood funkci. V tomto článku jsme použily několik procedur pro formování těchto počátečních znalostí. Mohou být založené na před-vzorkových datech, nebo mohou být nalezeny maximalizací

likelihood funkce na datech. Optimalizované počáteční podmínky generují lepší fit modelu.

Dynamika učení je podstatně ovlivněná předpokladem o informačním setu, který mají agenti k dispozici pro formování očekávání. Extrémní předpoklad je, když agenti znají redukovanou formu modelu a musí odhadnout parametry. V tomto případě agenti použijí správnou reprezentaci prostřednictvím minimálního počtu stavů (MSV) pro odhad regrese jejich očekávání. Tento případ je nejbližší racionálním očekáváním. Ale je více realistické, když předpokládáme, že agenti používají jen omezený set informací. V našem modelu je nejpřirozenější umožnit agentům používat jen pozorované proměnné. Tato učící specifikace je označována jako VAR učení.

Učení je uvedeno na úrovni linearizovaných Eulerových rovnic. Dopad učení pro omezení rozpočtu agentů jsou tudíž zanedbatelné. Preston (2005) ukazuje konzistentní ošetření učení v DSGE modelech.

Co se týče výsledků, naše nejlepší modely generují marginální likelihood funkci blízkou optimálnímu DSGE-VAR modelu. Specifické počáteční podmínky významně přispívají k tomuto výsledku, což dokazuje, že očekávání v konzistentním modelu způsobené předpokladem racionálního chování je příliš restriktivní. Nejlepší modely jsou ty, kde počáteční očekávání jsou optimalizované pro data ve vzorku, což se shoduje s předchozí literaturou. Omezení sady proměnných užitých v předpovídajících rovnicích na sadu pozorovaných proměnných může produkovat model, který je lepší než modely s MSV, které používají úplnou sadu pozorovaných a nepozorovaných proměnných implikovaných racionálními očekáváním. Nejlépe fitující modely mají spíše nižší zisk, což naznačuje, že to budou počáteční očekávání, které hrají důležitou roli pro zlepšení marginální likelihood funkce a ne samo vylepšené učení pro odhad nových očekávání.

Funkce odezvy se zdají být slibné: učící modely jsou schopné generovat inflační odezvu na produktivní šoky, která je velmi rychlá a silná, zatímco monetární odezva je pomalá a trvalá. Tyto výsledky rovněž přecházejí některé z hlavních špatných specifikací DSGE modelu, jak naznačuje DSGE-VAR metodologie. Předpovídající rovnice, které se výrazně liší od REE, se zdá být klíčovým výsledkem.

Dynamika, která se objeví kvůli procesu učení, systematicky neovlivní odhadované strukturální parametry DSGE modelu. Tento výsledek je v kontrastu s předešlými výsledky v literatuře, ale je v souladu s výsledky z DSGE-VAR metodologie, které naznačuje špatnou specifikaci ale žádný systematický bias ve strukturálních parametrech.