

# Revenue and Efficiency in Multi-Unit Uniform-Price Auctions

Michal Břeský

## Non Technical Summary

Recently both the range and the value of objects sold by auction have grown tremendously. An auction is an exchange mechanism with asymmetric information. Auctions are so popular because when the seller is unsure about the value that bidders assign to the sold objects, one possible way to reveal the bidder who is willing to pay the highest price for the object is to apply an appropriate auction mechanism. An auction can be treated as a game in which the seller offers one or more units to the auction participants. The seller does not know the bidder's value of any particular unit, but he can set up an explicit set of institutional rules determining unit allocation and prices on the basis of bids submitted by the auction participants. A common seller's goal when designing the auction is to maximize the revenue. In single-unit auctions when the seller has some value for the auctioned object, it is optimal from the seller's revenue point of view to set the reserve price above the seller's value. The seller who sets such a reserve price faces a loss when no bidder is winning the object. But this loss is offset by a higher average price when the object is sold in the auction in either the first-price or the second-price auction..

When the seller is a government selling an object, the government may not care only about the revelation of the bidder who pays the higher price in the auction (seller's expected revenue) but also about the bidder's value that the winner derives from using the object sold in the auction. In this case, the loss when no object is sold is an implausible outcome of the auction. Therefore such a seller sets an optimal reservation price in a different way – applying different criteria (see Krishna (2002) for more detailed analyses). Such a seller's important goal is to sell the object to the bidder who derives the highest value from winning and using the object. In the literature, such seller's criterion is called efficiency.

In many cases the seller intends to sell more than one object simultaneously and, therefore, designs a multi-unit auction. In multi-unit auctions the typical bidder wishes to buy more than one unit from the set of objects being sold. The theoretical literature on auctions focuses more and more often on auction environments in which each bidder can obtain more than one unit. The equilibrium analysis of auctions, in which each bidder may win various subsets of the good being offered, has proven to be a challenge. The reason is that it is not a simple task to derive the shape of bidder's equilibrium strategies, their essential properties, or the properties of different equilibria as compared to the single-unit auctions.

This paper analyzes efficiency in a multi-unit auction with a positive reservation price. I demonstrate that the positive reservation price is an important policy tool that may increase efficiency (or welfare) in multi-unit uniform-price auctions, which is in contrast to single-unit auctions in which the positive reservation price decreases

efficiency. The only main important prerequisite of this result is that the reservation price increases a bidder's equilibrium strategy in a specific way that is inherent to the uniform-price auction.

For illustration, imagine two bidders in an auction with 2 units for sale with a zero reservation price. Both bidders have two values denoted as  $v_1, v_2$  and  $v_1', v_2'$  and submit two bids denoted as  $b_1, b_2$  and  $b_1', b_2'$  for the two units the seller is offering. If the values are such that  $v_1' > v_2' > v_1 > v_2$ , then it is efficient if the first bidder wins both units. In this uniform price auction the price of each unit is determined by the maximum of the third highest bid and the seller's reservation price. Since each bidder does not know the opponent's values, when each bidder expects that his second unit bid will be defeated by the opponent first unit bid, each bidder submits a lower second unit bid. Then it often happens that the bidders submit bids with the following ordering  $b_1' > b_1 > b_2' > b_2$  and each bidder wins one unit, which is not efficient. If the seller increases the reservation price above  $v_1$ , then the first bidder increases both bids above the reservation price, but the second bidder does not submit any bid above the reservation price, and the first bidder wins both units, which is an efficient outcome.

At the same time the seller's revenue increases in many cases because the price is determined by the reservation price that exceeds the second bidder's second unit bid if the reservation price were zero. This reasoning is valid for the multi-unit uniform-price and to some extent for other multi-unit auctions if  $b_1 > b_2'$  when  $v_1 < v_2'$ . On the other hand, setting the reservation price too high introduces inefficiency when the supply is greater than the number of submitted bids (e.g.  $v_1' > R > v_2' > v_1 > v_2$ ), in a similar way as in the single-unit auction.

In summary, the seller faces a trade off between these two sources of inefficiency and the total effect is ambiguous. This trade off is qualitatively different as compared to single-unit auctions in which the effect of a positive reservation price is always positive. In this paper I show that the expected efficiency typically increases when the seller increases the reservation price above 0 in the uniform-price auction.

### **Non Technical Summary**

Hodnota a rozmanitost zboží prodáváných v aukci s postupem doby vzrůstá. Aukce je směnný mechanismus s asymetrickou informací. Aukce se staly velmi populárními, protože, pokud prodávající neví jakou hodnotu mají prodávané zboží pro kupující, jeden ze způsobů, jak vybrat kupujícího, který zaplatí nejvyšší cenu za dané zboží, je zorganizovat vhodně navrženou aukci. Aukce může být charakterizována jako určitá hra s pravidly, v níž prodávající nabízí k prodeji jeden objekt nebo více jednotek zboží. Proávající nezná jakou hodnotu má zboží pro účastníky aukce, ale může stanovit pravidla aukce určující, kdo obdrží prodáváný objekt či zboží a jakou zaplatí cenu na základě podaných objednávek v aukci. Při navrhování aukčních pravidel je obvyklým cílem prodávajícího dosáhnout nejvyššího výnosu z prodeje.

Při aukci jednoho objektu, které má určitou hodnotu i pro prodávajícího, je, z hlediska prodávajícího nejlepší, stanovit minimální cenu pro objednávky nad hodnotu, kterou má zboží pro prodávajícího. Tento prodávající, který stanoví takovouto cenu, se potýká se ztrátou, pokud žádný účastník nezíská zboží v aukci, protože nepodá objednávku nad

touto cenou. Tato ztráta je však vyvážena vyšší průměrnou cenou při uskutečnění prodeje zboží a to jak v aukci, v níž je cena určena nejlepší nabídkou, nebo druhou nejlepší nabídkou.

Když je prodávajícím vládní autorita, hlavním cílem prodávajícího nemusí být prodej za nejvyšší cenu, ale především to, jakou hodnotu získá účastník aukce z využívání objektu či zboží prodaného v aukci. V tom případě je ztráta způsobená neprodáním objektu či zboží velmi nepříjemným výsledkem aukce. Proto prodávající stanovují jinou optimální minimální cenu pro objednávky - používají jiné kritérium (podrobněji viz Krishna (2002)). Pro takového prodávajícího je důležitým cílem prodat zboží tomu, kdo získá nejvyšší hodnotu z používání zboží prodaného v aukci, což se nazývá efektivitou.

Mnohdy prodávající potřebuje najednou prodat mnoho jednotek zboží, a proto uspořádá více jednotkovou aukci. V takovéto aukci většinou i účastníci aukce objednávají více jednotek zboží. V ekonomická literatura se zabývá takovými aukcemi čím dále tím častěji. Analýza optimálních rovnovážných strategií je však mnohem obtížnější ve srovnání s aukcí pouze jednoho objektu.

Tato studie analyzuje efektivitu ve více jednotkové aukci s minimální cenou pro objednávky, označenou jako  $R$ . Ukazuje se v ní, že kladná minimální objednávková cena je důležitým nástrojem, který má pozitivní vliv na efektivitu ve více jednotkové aukci, což je opačný efekt než v aukci jednoho objektu. Obecně k tomuto efektu dochází, pokud minimální cena zvyšuje určitým způsobem optimální rovnovážnou strategii účastníků aukce, který je obdobný jaké v případě více jednotkové aukci s jednotnou cenou.

Pro ilustraci si představme dva účastníky v takovéto aukci se dvěma jednotkami zboží na prodej a nulovou minimální cenou pro objednávky. Každý účastník má hodnotu pro každou jednotku zboží označovanou jako  $v_1, v_2$  a  $v_1', v_2'$  a podá dvě objednávky označované jako  $b_1, b_2$  a  $b_1', b_2'$ . Pokud jsou hodnoty účastníků v tomto pořadí  $v_1' > v_2' > v_1 > v_2$ , pak je efektivní, aby první účastník získal v aukci obě jednotky zboží. V tomto případě aukce je cena stanovena jakožto maximum z třetí nejvyšší podané objednávky a minimální ceny pro objednávky  $R$ . Protože žádný účastník nezná hodnotu zboží druhého účastníka v aukci, ale očekává, že jeho objednávka na druhou jednotku bude nižší než objednávka druhého účastníka na první jednotku, nastane často situace, že jsou podány objednávky v tomto pořadí  $b_1' > b_1 > b_2' > b_2$  a potom každý účastník obdrží jeden objekt, což není efektivní. Když prodávající zvýší minimální objednanou cenu nad  $v_1$ , potom první účastník zvýší obě své objednávky nad minimální cenu, ale druhý účastník nepodá žádnou objednávku. Proto první účastník získá obě jednotky, což je efektivní výsledek.

Současně v mnoha případech je i výnos prodávajícího vyšší, protože cena v tomto případě je určena minimální objednávkovou cenou. Naopak, stanovení příliš vysoké minimální ceny pro objednávky je zdrojem neefektivity, pokud je nabízeno více jednotek k prodeji než podaných objednávek (např.  $v_1' > R > v_2' > v_1 > v_2$ ) podobně jako v případě aukce jednoho objektu.

K dosažení vyšší efektivity aukce tedy prodávající může vhodnou změnou minimální objednávkové ceny zvolit určitý kompromis mezi těmito dvěma zdroji neefektivity. Tento efekt zvýšení efektivity zvýšením minimální objednané ceny prodávajícím není přítomen v aukci pouze jednoho objektu.